Hipótesis de Planck

Ante el fracaso de la teoría de *Rayleigh –Jeans*, Planck propuso una hipótesis que proponía que el principio de la equipartición de la energía no se aplicaba al problema de radiación de cuerpo negro.

Planck partió de los siguientes hechos:

- La teoría de Rayleigh-Jeans funciona a frecuencias bajas, entonces se puede suponer que:

$$\bar{\varepsilon}_{\nu \to 0} \longrightarrow kT \tag{1}$$

- La discrepancia de la curva de Rayleigh-Jeans con la experimental a frecuencias altas se podría eliminar si la energía promedio $\bar{\varepsilon}$ varía con la frecuencia de alguna forma tal que:

$$\bar{\varepsilon}_{\nu \to \infty} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Propuso entonces que $\bar{\varepsilon}$ sea una función de ν y no una constante *kT* como lo establece el principio de equipartición de la energía

Hipótesis de Planck

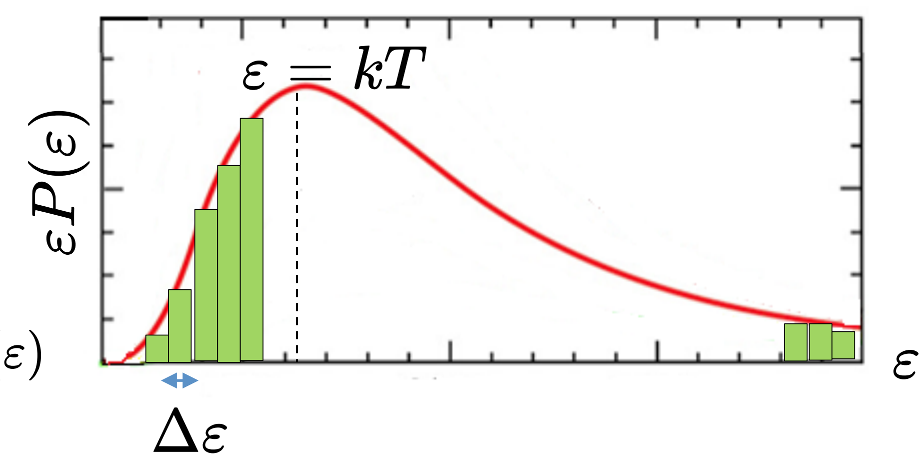
Planck supuso que la energía ε podía tomar sólo cierto valores discretos, e lugar de cualquier valor, y que los valores discretos estaban uniformemente distribuidos, es decir, múltiplos de algún valor constante $\Delta\varepsilon$

$$\varepsilon = 0, \Delta\varepsilon, 2\Delta\varepsilon, 3\Delta\varepsilon \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\varepsilon_n = n\Delta\varepsilon \qquad n = entero$$

Si le energía ε no es una variable continua se debe cambiar la integral usada para calcular el valor promedio de la energía $\bar{\varepsilon}$ por una suma. En forma gráfica:

El valor promedio es la suma de las áreas de los rectángulos, de amplitud $\Delta\varepsilon$ y alturas dadas por el valor de la función $\varepsilon P(\varepsilon)$ al iniciar cada intervalo



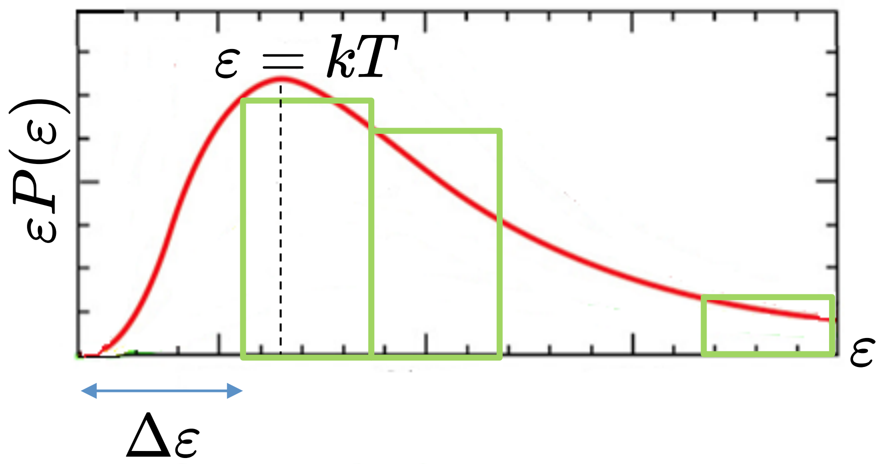
Si $\Delta\varepsilon \ll kT$, el área $\bar{\varepsilon} \approx kT$

- mismo resultado clásico
- $\Delta\varepsilon$ es muy pequeño en comparación con el intervalo de energías kT en donde $P(\varepsilon)$ cambia significativamente
- En este caso es indiferente si ε es continua o discreta

Hipótesis de Planck

¿Qué pasa si el valor del cuanto de energía es mayor?

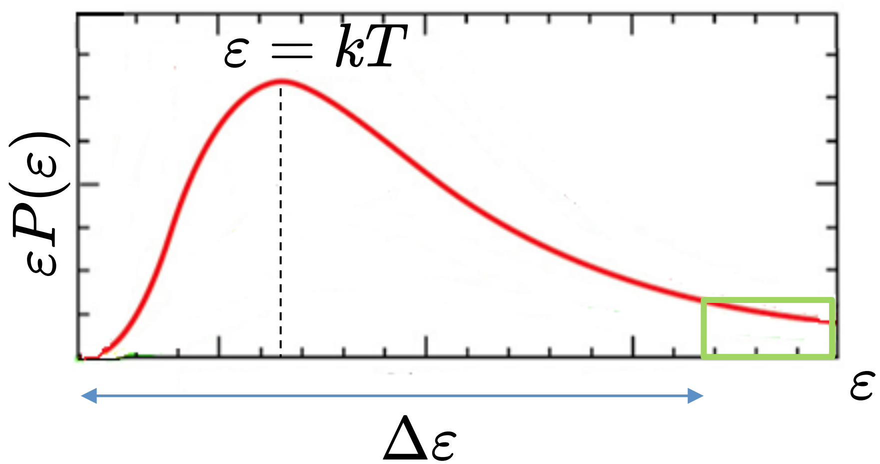
Los rectángulos muestran la contribución de $\varepsilon P(\varepsilon)$ al área total, para cada energía permitida



Si $\Delta\varepsilon \approx kT$, el área $\bar{\varepsilon} < kT$

- El valor de $\varepsilon = 0$ es dominante en el cálculo de $\bar{\varepsilon}$ y por eso el resultado obtenido es más pequeño

El rectángulo para $\varepsilon = 0$ siempre es de una altura cero. Esto produce un gran efecto en el área total si las amplitudes de los rectángulos son grandes



Si $\Delta\varepsilon \gg kT$, el área $\bar{\varepsilon} \ll kT$

- Se observa más claramente el efecto de tomar valores discretos

Hipótesis de Planck

Planck proposo:

1) Podía obtener $\bar{\varepsilon} \approx kT$ cuando la diferencia entre enerías adyacentes $\Delta\varepsilon$ es pequeña

2) Y por otra parte, podía obtener que $\bar{\varepsilon} \approx 0$ cuando $\Delta\varepsilon$ es grande

Se requiere (1) para ν pequeñas, y (2) para ν grandes.

Por lo tanto se requería que $\Delta\varepsilon$ fuera una función creciente de ν

Planck propuso la relación más simple, una realación lineal:

$$\Delta\varepsilon = h\nu \qquad (4)$$

donde ***h*** es la constante de proporcionalidad

Por ajuste numérico con los datos experimentales de radiación, Planck determinó el valor de la constante h:

$$h = 6.63 \times 10^{-34} joule \cdot s \qquad (5)$$

Hipótesis de Planck

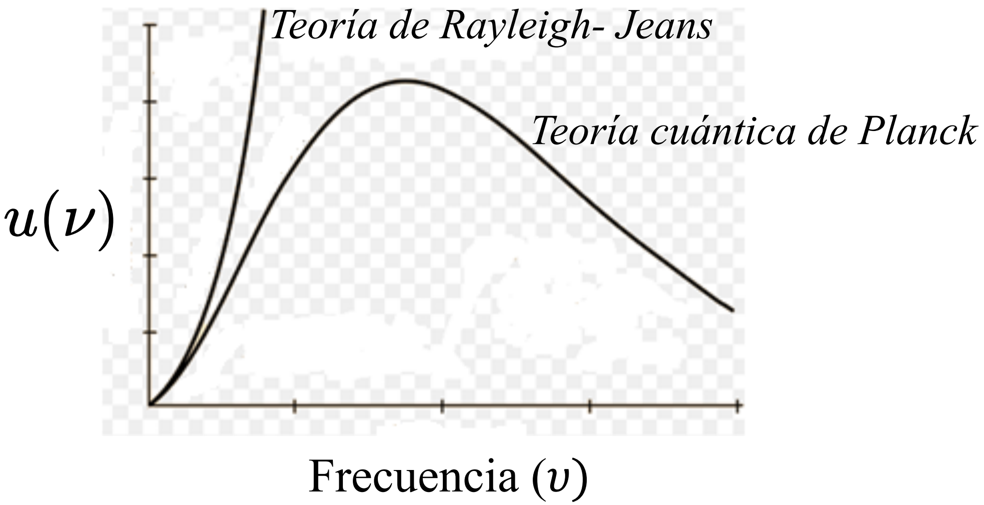
Como consecuencia de postular que $\varepsilon = nh\nu$, Planck obtuvo la siguiente expresión para la energía promedio (utilizando la distribuación de Boltzmann):

$$\bar{\varepsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (6)$$

Con esta energía promedio, la nueva expresión para la densidad de energía es:

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)}$$

(7)



NOTA: Planck no altero la distribución de Boltzmann, lo que hizo fue considerar la energía de las ondas electromagnéticas estacionarias dentro de la cavidad, como una cantidad discreta en lugar de contínua.

Demostración formula de Planck

Utilizando la hipótesis de Planck $\varepsilon = nh\nu$ demostrar que:

$$\bar{\varepsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (1)$$

Para calcular la energía promedio se debe cambiar las integrales por sumas (ahora la energía esta cuantizada)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty P(\varepsilon) d\varepsilon} \longrightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \varepsilon P(\varepsilon) \Delta\varepsilon}{\sum_{n=0}^\infty P(\varepsilon) \Delta\varepsilon} \qquad (2)$$

Donde:

$$P(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{kT} \qquad (3)$$

Demostración formula de Planck

Sustituyendo tenemos:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon)\Delta\varepsilon}{\sum_{n=0}^{\infty} P(\varepsilon)\Delta\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \left[\frac{1}{kT} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kT} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} \qquad (4)$$

Si se define la variable: $\alpha = \frac{h\nu}{kT}$ (5)

Se tiene:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{kT \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} \qquad (6)$$

Demostración formula de Planck

Por otra parte considere la siguiente derivada:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right)\right] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} -ne^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} \qquad (7)$$

Comparando (6) y (7) es posible escribir la energía promedio como:

$$\bar{\varepsilon} = -\alpha kT \frac{d}{d\alpha}\left[ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right)\right] \qquad (8)$$

Demostración formula de Planck

Es posible calcular el valor de la suma:

$$\bar{\varepsilon} = -\alpha kT \frac{d}{d\alpha}\left[ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right)\right] \qquad (8)$$

Analizando la suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} \quad \cdots \qquad (9)$$

Si hacemos el cambio de variable: $x = e^{-\alpha}$ (10)

$$= 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots = (1-x)^{-1} \qquad (11)$$

Demostración formula de Planck

De esta forma:

$$\bar{\varepsilon} = -\alpha kT \frac{d}{d\alpha}\left[ln(1-x)^{-1}\right] = -\alpha kT \frac{d}{d\alpha}\left[ln(1-e^{-\alpha})^{-1}\right] \qquad (12)$$

$$\bar{\varepsilon} = +\alpha kT \frac{d}{d\alpha}[ln(1-e^{-\alpha})] \qquad (13)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\alpha kT e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})} \qquad (14)$$

En términos de las variables originales:

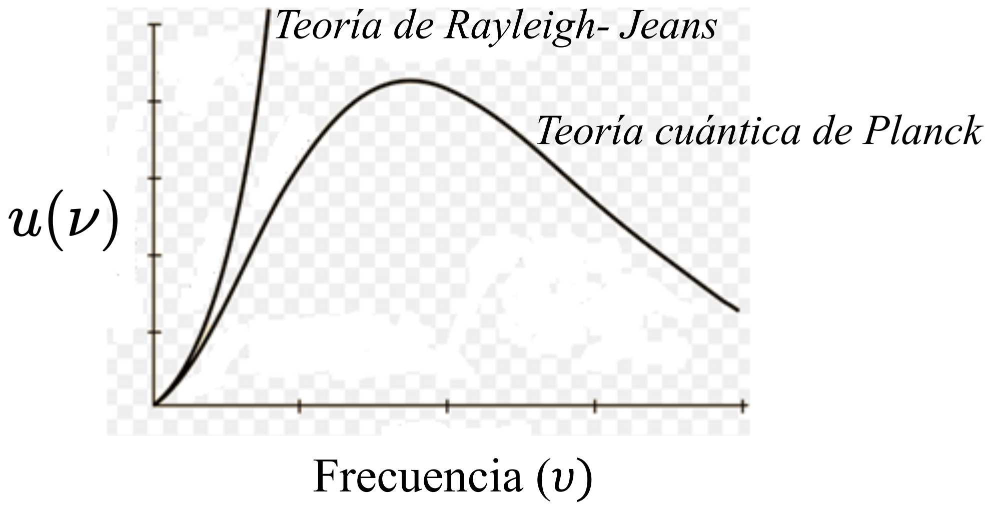
$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (15)$$

Demostración formula de Planck

TAREA

1) Mostrar que a bajas frecuencias la fórmula de Plack para la densidad de energía coincide con la de Rayleigh-Jeans

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)$$



2) Verificar que la fórmula de Planck para la densidad de energía cumple con la ley de Stefan-Boltzmann

$$u = \int_0^\infty u_T(\nu)d\nu \sim aT^4$$